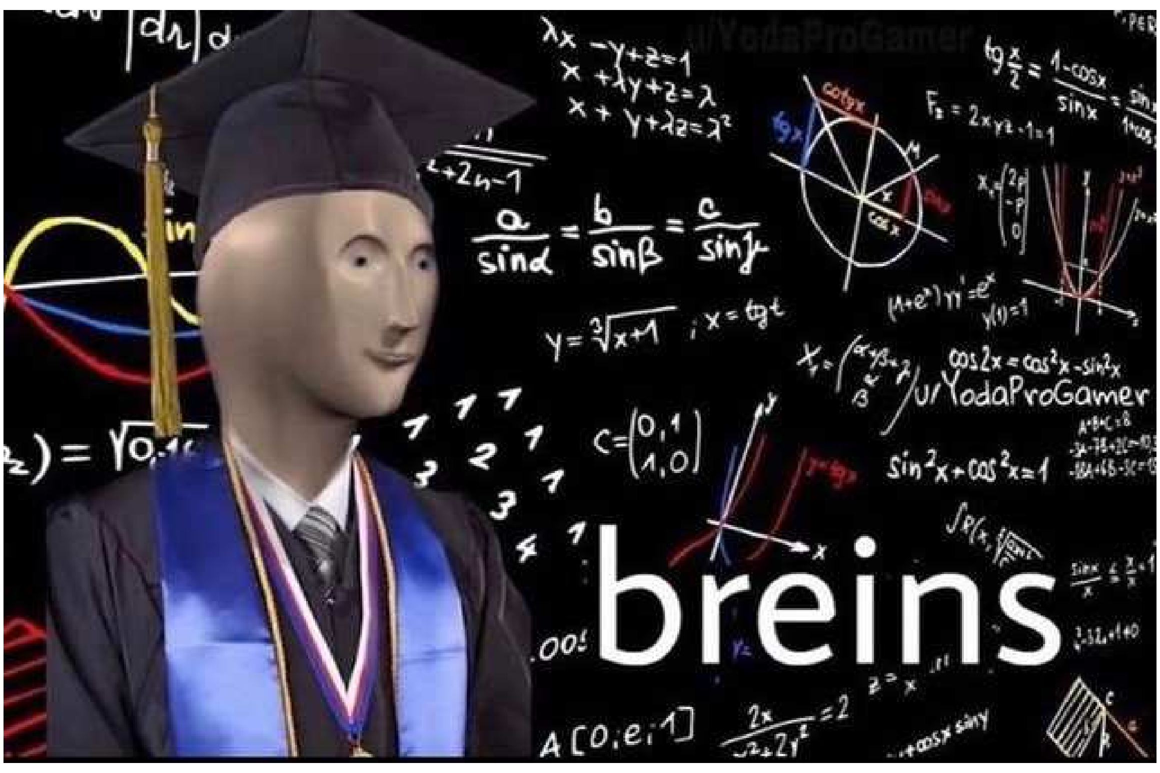
Smatin

Édition Hiver 2021

Quand tu termines ton bacc sans perte de généralité



Mot de l’éditeur

Bourbaki.

Autres mots de l’éditeur

Salut les potes,

C’est sur cette blague assez médiocre que je décide de faire commencer cette édition du Smatin:

Est-ce que vous le saviez-vous tu c’est quoi est-ce que c’est la différence entre un.e matheux.se et un.e ingénieur.e qui vont à la toilette pour uriner? Un.e mathématicien.ne fait π π tandis qu’ un.e ingénieur.e fait 9. Ok! Blague pour accrocher les lecteurs et les lectrices, c’est fait!

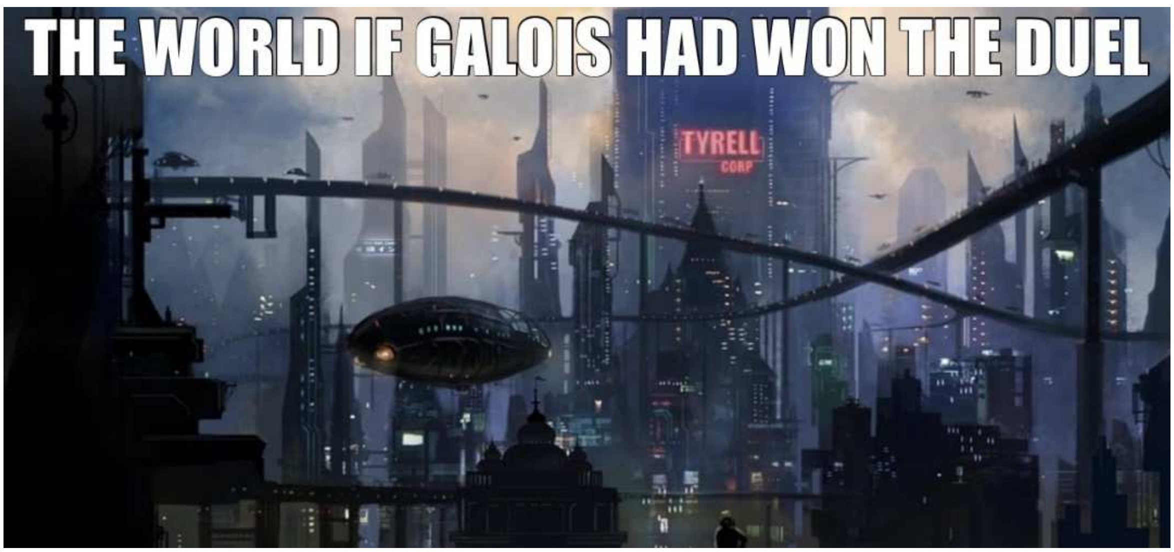
Cette édition du Smatin est très spéciale. Il s’agit d’un Smatin dont vous êtes le héros. Une fois que vous aurez terminé de lire une page, un nombre x sera inscrit dans le pied de page. **Une et une seule option** s’offre à vous : aller à la page x + 1. J’espère sincèrement ne pas m’être trompé dans la pagination sinon le concept devient tout d’un coup beaucoup moins attrayant.

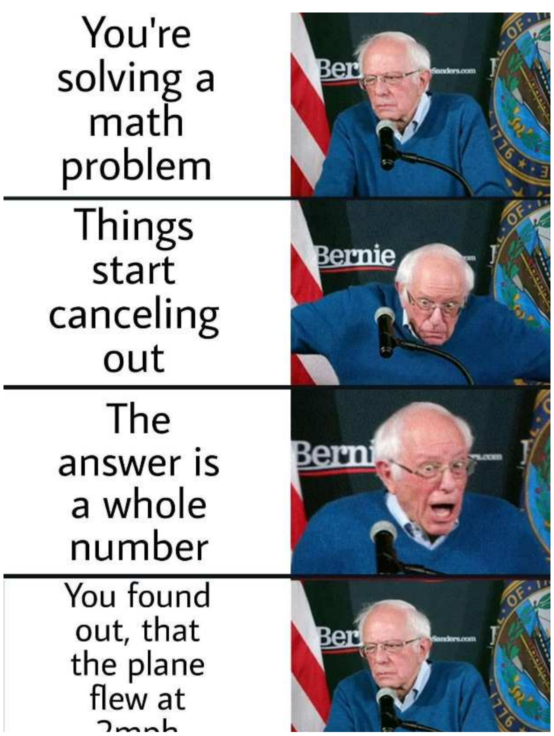
Sur une note plus sérieuse, je suis vraiment fier de vous présenter l’édition d’hiver 2021 du Smatin. Beaucoup de variété au menu de cette année; du sérieux autant que des folies. Je suis convaincu que tout le monde en aura pour son argent (pis sinon le Smatin est gratuit!). Je tiens à remercier les braves qui ont accepté de publier leurs œuvres mathématico-divertissantes dans la présente revue. Vous êtes les meilleur.e.s! Merci pour votre implication!

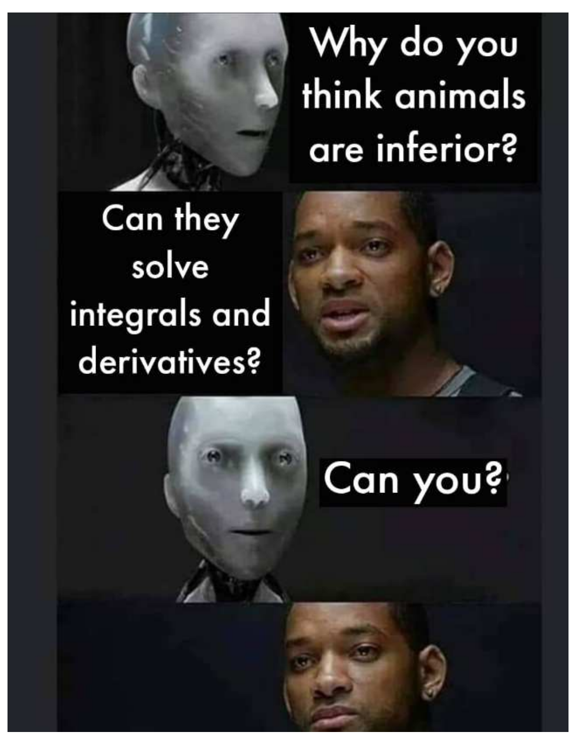
Bonne lecture!

Anthony Doyon
Apprenti astrologue (ou pas),
Mais avant tout,
VP-Info

Table des matières







Test de personnalité: quel solveur d'EDO êtes-vous ?

Philippe-André Luneau

***Abstract*— L'autre fois je me promenais sur internet. Pis là, j'ai vu un quiz Buzzfeed qui te dit quel solveur d'EDO (équation différentielle ordinaire) de Matlab t'es en répondant à quelques questions (https://www.buzzfeed.com/surfswim/which-matlab-ode-solver-are-you-crsc06ji63). Ça m'a donné un résultat que j'aimais pas, alors je me suis dit que j'allais faire ma propre version pour pouvoir finalement être le solveur de mes rêves.**

I. Questionnaire

1) On te demande pour la $n-$ième fois ($n \geq 30$) de faire la preuve que $\sqrt{2}$ est irrationnel dans ton party du jour de l'an. Comment réagis-tu?
   a) Tu dis à ta tante Philémone que t'es écoeuré des maths et tu préfères lui raconter ta dernière date au Shaker St-Joseph.
   b) Tu t'appliques à faire la démonstration pour que la rigueur triomphe sur l'ignorance.
   c) Tu prend ton regard ténébreux et tu dis que la démonstration est triviale.
   d) Tu essaies de faire la démonstration mais t'es sloppy drunk alors tu la fais tout croche.
2) Tu décides de prendre des cours de maîtrise pendant la dernière année de ton bac et tu tombes sur l'année avec les profs les plus rough et hardcore. Qu'est-ce que tu fais?
   a) Tu décides de juste lâcher tout ça et de prolonger ta maîtrise pour essayer de préserver une cote legit.
   b) Tu go all in pour show off ton intellect supérieur à tes futurs profs.
   c) Tu restes low profile en espérant qu'ils se souviendront pu de toi et de tes résultats de merde quand tu commenceras ta maîtrise.
   d) Tu pleures et ça wash away le gros D en encre rouge sur ta copie.
3) Tu es en train de faire ton examen final à distance, et il y a une section avec des "vrai ou faux". Tu n'es pas sûr quoi mettre à la question 2. Cependant, ta session en dépend car tu as eu 50% à l'intra (ouioui, c'est dur les cours à distance). Que fais-tu?
   a) Tu la joues à pile ou face.
   b) Tu as confiance en ton intuition de mathématicien qui ne t'as jamais trahi.
   c) Tu écris un "T" qui ressemble vraiment à un "F", en espérant que quand le prof l'observera, la superposition d'état se fixera sur la bonne réponse.
   d) T'écris juste rien parce que t'as pas compris que c'était pas à correction négative.
4) Ton/ta partenaire sexuel.le (ou autre pronom que la personne veut qu'on utilise), qui est aussi en maths, te chuchottes pendant le sexe qu'il/elle est très **ouvert.e**. Que lui réponds-tu ?
   a) Tu lui dis que t'es vraiment chanceux d'être dans une relation si merveilleuse où vous pouvez communiquer vos désirs.
   b) Tu arrêtes tout et tu lui demandes dans quelle métrique.
   c) Tu lui réponds sensuellement que vous êtes vraiment complémentaires car tu es fermé.
   d) Ça te fait trop penser à Analyse III alors ça te turn off et tes pu capable de rien faire car ce cours fut une expérience traumatique pour toi.
5) Quel est ton artiste canadien favori parmis les suivants?
   a) Shawn Mendes (Véro à Rouge FM dit que c'est vraiment un génie).
   b) Rush (Si c'est pas en 13/7 c'est même pas la peine d'en parler).
   c) Cantique Lépreux (Si quelqu'un d'autre que toi en parle c'est même pas la peine d'en parler).
   d) Bob Bissonette (OOHÉÉÉÉÉ, OHÉÉ OHÉÉ OHéééé).
6) T'es en train d'étudier pour ton final d'algèbre mais t'es capable de faire aucun exercice sans le corrigé. L'examen a lieu demain matin à 8h30. Qu'est-ce que tu fais?
   a) Tu vas gamer à Among Us avec les boys pour te changer les idées.
   b) Tu restes debout toute la nuit pour travailler, même si ça te prend 3h faire la démo du numéro 73u).
   c) Tu décides de relire en boucle tes notes en espérant que ça va changer ta situation.
   d) Tes pas capable de dormir parce que tu te dis que, sans perte de généralité, tu vas couler le cours.

II. RÉSULTATS

Si tu as répondu:

A. *Une majorité de a)*

Tu es `ode45`. Tu te qualifies de *quirky*, mais en réalité tu es plutôt *basic*. Tu es toujours partant pour sortir au bar avec tes amis et faire des activités sociales. Tu aimes faire des nouvelles connaissances, surtout lorsque tu les rencontres au Shaker. Après ton bac en maths, tu aimerais poursuivre une carrière dans l'enseignement collégial. Tu t'impliques beaucoup dans l'association étudiante et c'est grâce à toi qu'on a plein de belles activités :)

B. *Une majorité de b)*

Tu es `ode15s`. Tu es un *gifted child*: les maths n'ont aucun secret pour toi. Tu clanches les cours, tu aides tes collègues et tu as déjà ton projet de maîtrise confirmé, même si tu n'es qu'en deuxième année du bac. Par contre au niveau social, c'est plus dur: les sweatpants font partie intégrante de ta garde-robe quotidienne (même en période pré-COVID) et dans 50% des phrases qui sortent de ta bouche, il y a les mots "voisinage", "isomorphisme" ou "dénombrable". Mais on est au bac en maths, alors tout le monde est ton ami anyway :)

C. *Une majorité de c)*

Tu es `ode15i`. Tu es mystérieux, introverti et calme, mais quand tu entres dans une pièce, tu dégages une énergie que tout le monde remarque. La majorité croit que tu pètes des scores mais en réalité tu es plutôt dans la moyenne. Tu es la personne dans le cours que tout le monde a remarqué mais dont personne ne connaît le nom. Tu finis toujours tes examens en premier et lorsque tu sors de la classe, les gens se mettent à angoisser. Mais quand tu feras ton premier travail d'équipe, les gens verront que tu es une personne cool et tu commenceras à t'intégrer à la gang du bac :)

D. *Une majorité de d)*

Tu es `ode23`. Ton relevé de notes ressemble probablement à ton résultat à ce test: une majorité de D. Tu dois souvent te faire carry par tes amis dans les travaux d'équipe, mais ça leur fait plaisir, car tu es toujours de bonne humeur et tu mets du piquant dans leurs séances d'étude. Au départ, tu étais probablement ici juste pour monter ta cote pour aller en médecine (vu que t'étais pas pire en calcul diff au cégep), mais finalement tu t'es rendu compte que c'était pas réaliste et t'es resté pour la vie étudiante de fou! Même si tu rush un peu dans tes cours, tout le monde t'aimes bien et tu profites de ton séjour au bac en maths :)

III. DÉTAILS SUR LES SOLVEURS

On rappelle qu'une équation différentielle ordinaire explicite est de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$

et que de façon générale, on la résout numériquement aux temps t_i en appliquant un schéma *à un pas* de la forme

$$y(t_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + h \cdot \Phi(t_i, y_i, h)$$

où $h = t_{i+1} - t_i$ est le *pas de temps* et Φ est une expression qui dépend de la méthode qu'on utilise.

A. *`ode45`*

C'est une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, donc d'ordre assez élevé (l'erreur diminue rapidement quand on diminue le pas de temps). Par contre quand le problème est raide (*stiff*), c'est-à-dire qu'il y a une forte variation sur un intervalle de temps très court dans la solution, cette méthode n'est pas très bonne, même avec des très petits pas de temps. La méthode est quand même assez générale, et dans la documentation, on recommande toujours de commencer par aborder un problème avec `ode45`.

B. *`ode15s`*

C'est une méthode BDF (*backward differentiation formula*), donc elle approxime la dérivée en allant chercher de l'information dans le "passé". Ce schéma utilise des *pas multiples*, c'est-à-dire qu'il ne se base pas seulement sur la valeur de la solution au pas de temps précédent (y_i), mais utilise également les autres plus anciennes ($y_{i-1}, y_{i-2}, ...$). Cela permet d'avoir plus de stabilité et de très bien performer sur les problèmes raides (contrairement à `ode45`).

C. *`ode15i`*

Cette méthode est très similaire à `ode15s`, mais elle s'applique pour des équations différentielles implicites, c'est-à-dire pour lesquelles on ne peut pas isoler y' comme dans (1). Généralement, cela est accompli en ajoutant la résolution d'une équation non-linéaire de la forme

$$F(t_i, y_i, y_{i+1}) = 0$$

par la méthode de Newton.

D. *`ode23`*

Cette méthode est très similaire à `ode45` (schéma de Runge-Kutta), mais c'est d'ordre 2 donc l'erreur diminue moins rapidement lorsqu'on diminue h. *It's fucking RAW!!!* Par contre, ça peut être plus rapide lorsqu'on n'a pas du tout besoin de précision.

Femmes et mathématiques

Maëlle Morisset-Lavoie

Chers lecteurs et lectrices du Smatin,

Dans mon cours à option *Recherche, analyse et dissertation*, j'ai eu l'occasion d'élucider une problématique qui me chicotait quant à mon domaine d'étude, les mathématiques. En fait, j'y avais remarqué une forte présence féminine auprès des étudiants, mais une tout autre réalité auprès du corps enseignant. Je me suis donc demandé ce que les femmes ont dû traverser comme épreuves pour accéder au monde académique des mathématiques. Ainsi, mon analyse traite des femmes en mathématiques, aux États-Unis, aux 20^e et 21^e siècles. Je vous ai préparé un court résumé de mon travail en espérant que cela vous donnera le goût d'en apprendre davantage à ce sujet. Si cela est le cas, ou si vous désirez déjà vous attaquer à mon analyse, vous n'avez qu'à suivre ce lien `https://drive.google.com/file/d/1s8X569N381T44dRdxyKEmjPgKDMlWL5E/view?usp=sharing`

Bonne lecture !

Résumé

Quelles sont les principales causes de l'évolution de la place des femmes en mathématiques, aux 20^e et 21^e siècles, aux États-Unis?
D'une part, l'origine de cette évolution se trouve dans l'avènement de la Grande Dépression et de la Seconde Guerre mondiale, ainsi que dans les rôles que cette guerre a permis aux femmes d'exercer. D'autre part, dans la seconde moitié du 20^e siècle et dans un contexte où les hommes sont à la tête des organisations mathématiques, la création de l'*Association for Women in Mathematics* (AWM), les buts poursuivis par celle-ci, ainsi que les actions qu'elle a posées ont également influencé cette progression des femmes en mathématiques.
Le nombre de femmes obtenant un doctorat en mathématiques aux États-Unis était en hausse au début du 20^e siècle. Or, cette lancée a été freinée par le manque de ressources observé durant la Grande Dépression. Les femmes n'avaient guère de bonnes possibilités d'accès au domaine des mathématiques.
Néanmoins, la Seconde Guerre mondiale qui suivit a permis un meilleur accès aux femmes dans le domaine des mathématiques en éducation. En outre, les effectifs dans les facultés des collèges et universités ont grandement diminué à cause du départ des hommes à la guerre, ainsi que dans des groupes de recherche en mathématiques. Ceci a entraîné bon nombre de ces institutions à ouvrir leurs portes aux femmes.
Puis, avec le retour des hommes après la Seconde Guerre mondiale, l'opinion publique du rôle de la femme au foyer reprit sa place, ce qui a entraîné une baisse de leur participation en mathématiques. Ainsi, l'impression de mise en marche vers une plus grande présence des femmes pendant la guerre s'est vue freinée lors des années qui ont suivi celle-ci.
C'est ainsi qu'un besoin de ressources pour les femmes s'est fait de plus en plus ressentir afin de s'échapper de cette misogynie. Ceci a engendré l'instauration d'associations pour les femmes dans le domaine des mathématiques.
L'*Association for Women in Mathematics*, fondée en 1971, est l'une des associations ayant permis aux femmes d'évoluer dans le domaine des mathématiques. Entre autres, elle a contribué à l'augmentation du taux d'oratrices lors de conférences, ainsi qu'à une meilleure présence de modèles féminins en mathématiques. En revanche, au 21^e siècle, tout n'est pas encore joué. L'AWM est encore nécessaire, car même si la place des femmes en mathématiques était assurée, ce qui n'est pas le cas, l'association permettrait tout de même de comprendre ce que leurs prédécesseures ont dû surmonter pour se rendre là où elles sont.

Une question de série de Taylor.

Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité

$$\mathbb{D} := \{ z = x+iy : \sqrt{x^2+y^2} < 1 \}.$$

Montrer que f admet un développement en série de Taylor admissible sur $\mathbb{D}$, i.e.

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (\forall z \in \mathbb{D}).$$

Solution publiée dans le Sunation d'Anthony !!

Commentaires

- Une fonction f est holomorphe sur $\mathbb{D}$ si f est à valeurs complexes et en chaque $z_0 \in \mathbb{D}$, $\exists R > 0$ t.q.

  1. $D(z_0, R) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R \} \subseteq \mathbb{D}$
  2. $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \forall z \in D(z_0, R)$

- Ce n'est pas un problème de 1ère ou 2e année du primaire.
- Bonne chance !!.

Ben voyons? Un mathoscope très sérieux!

par Anthony Doyon

En 2019, j'ai consulté approximativement log(log($\sqrt{\pi}$)) horoscopes par minute dans le but de développer un algorithme sans faille qui me permettrait de prédire à probabilité 1 l'avenir mathématique des gens. Si l'on accepte l'hypothèse de Riemann, que l'on utilise la loi d'approximation-égalité $\pi = 3$ et que l'on néglige la force de friction de l'air, je pense que ça marche assez bien. Je te présente donc les moments mathématiques forts et moins forts de ton année 2021. Pendant ma lecture d'horoscopes, je suis tombé sous le charme du format d'écriture de ces derniers. J'ai donc perpétré la tradition du mieux que j'ai pu en restant aussi exact que l'alignement des astres me l'a permis.

Quelques précisions importantes :

Chaque indice est noté sur 5. Si tu étudies en mathématiques appliquées ou tu es présentement inscrit.e au baccalauréat intégré en mathématiques et informatique, ajoute 2 à ton indice Travail et sous. Si tu es inscrit.e au baccalauréat en mathématiques, n'ajoute surtout rien à ton indice Travail et sous (Je sais que t'aimerais ça, mais triche pô!). Si tu es intéressé.é par la théorie analytique des nombres, remplace ton indice Chance par son logarithme naturel (Ça, c'est pour que t'arrêtes de nous tanner avec tes loglog!). Si tu étudies en statistiques, ajoute 2 à ton indice Chance.

Capricorne – *22 décembre au 20 janvier*

Amour et amitié: Tu te sens un peu seul.e : chéri.e est très occupé.e ces temps-ci. Ne désespère pas, les mathématiques seront toujours là pour toi! Prends ta calculatrice et retourne compter! (❤️)

Travail et sous: 2021 sera parsemée de découvertes surprenantes et peut-être même de conjectures résolues. Il est très probable que ton nom reste attaché à un théorème. (💲💲💲💲💲)

Chance: Ta lune est en Vénus et tu trouveras peut-être une chaussette égarée depuis fort longtemps. (🍀🍀🍀)

Verseau – *21 janvier au 19 février*

Amour et amitié: La couverture jaune des livres Springer exerce une attraction démesurée envers ta personne. La tension est palpable! (❤️❤️❤️❤️)

Travail et sous: Qu'est-ce que tu fais en train de lire des mathoscopes? Ne te demande pas pourquoi il te reste 478 exercices à terminer! Retourne travailler! (💲)

Chance: Lance un dé et si tu es chanceux.se, tu le retrouveras intact. (🍀🍀)

Poissons – *20 février au 20 mars*

Amour et amitié: Tes ami.e.s adorent ta présence et tes memes mathématiques, mais il faut dire que tu surutilises un peu tes blagues d'ingénieur et d'approximations. (❤️❤️❤️)

Travail et sous: La solution à un théorème d'envergure semble se dessiner dans ton esprit, sauras-tu la cerner? (💲💲💲)

Chance: Si tu as de la chance, tu vas peut-être battre Schmitty à Smash Bros (Je n'ai toujours pas accepté ma défaite J-P! Je veux une revanche!). (🍀)

Bélier – *21 mars au 20 avril*

Amour et amitié: Prends l'amour par les cornes (haha bélier lol)! (❤️❤️)

Travail et sous: Ton nombre d'Erdös risque fortement de diminuer cette année. Beau travail! (💲💲💲💲)

Chance: Je sens un vent de chance qui souffle en ta direction. Si tu l'accueilles à bras ouverts, tes cours sur Zoom vont arrêter de planter. (🍀🍀🍀🍀🍀)

Chance: Ta bonne fortune cette année sera triviale ou bien laissée en exercice au lecteur. (🍀)

Taureau – *21 avril au 21 mai*

Amour et amitié: Chéri.e et toi êtes dans le même voisinage. Des rapprochements à ε près sont au rendez-vous! (❤️❤️❤️❤️❤️)

Travail et sous: Malheureusement pour toi, tu ne viendras pas à bout de l'hypothèse de Riemann en 2021. (💲)

Chance: Ton chiffre de chance est le 2 (Voilà pour toi mon 2 de pique!). C'est tellement un chiffre trash tier! Il ne mérite même pas son statut de nombre premier en théorie algébrique des nombres et dans mon coeur. (🍀)

Gémeaux – *22 mai au 21 juin*

Amour et amitié: En 2021, tu feras la rencontre de quelqu'un qui te complètera à merveille : ton ou ta complément orthogonal. (❤️❤️❤️❤️❤️)

Travail et sous: Bonne nouvelle! Ton quotient intellectuel est strictement supérieur à 0. De nombreuses possibilités d'emplois s'offriront à toi! (💲💲💲)

Chance: Tu oublieras un signe négatif à la première ligne d'un calcul de plusieurs pages. (🍀)

Cancer – *22 juin au 22 juillet*

Amour et amitié: Tu es aimé.e. (❤️❤️❤️❤️❤️)

Travail et sous: Tu es riche. (💲💲💲💲💲)

Chance: Tu es chanceux.se. (🍀🍀🍀🍀🍀)

Lion – *23 juillet au 22 août*

Amour et amitié: Tu intersecteras ton espace dual en 2021. (❤️❤️❤️❤️❤️)

Travail et sous: Les astres me chuchotent à l'oreille qu'une bourse te sera octroyée. Party mon/ma chum!! (💲💲💲💲💲)

Vierge – *23 août au 22 septembre*

Amour et amitié: Même si ta vie sociale te semble monotone pour le moment, Fatou t'assure que 2021 sera dominée par des émotions fortes. (❤️❤️❤️❤️)

Travail et sous: Tu ne résoudras pas l'un des problèmes du millénaire de l'Institut Clay cette année. Un peu décevant, mais bon… Tu t'attendais à quoi? (💲💲)

Chance: La chance te sourira et te fera un clin d'œil juste avant de te ghoster sur tous tes médias sociaux. (🍀)

Balance – *23 septembre au 22 octobre*

Amour et amitié: Une analyste te souhaitera bonne continuité. Fais semblant de trouver ça drôle! Ça devrait t'éviter un gros malaise. (❤️❤️❤️)

Travail et sous: La fée des dents te doit encore 5$ et c'est cette année que tu les recevras! (💲💲💲💲)

Chance: Tu trouveras un reste de spaghetti « encore pas pire » entre le four et ton comptoir. Chanceux/chanceuse !! (🍀🍀)

Scorpion – *23 octobre au 22 novembre*

Amour et amitié: Tu intégreras un nouveau groupe en 2021 et tes actions ne laisseront personne indifférent. Tu deviendras un membre libre! (❤️❤️❤️❤️❤️)

Travail et sous: Ton ascendant est peut-être bélier (Je ne m'y connais pas tant là-dedans…), mais ta cote Laval n'empruntera certainement pas une pente ascendante! (💲)

Chance: Dû à une erreur d'optimisation, l'un de tes colis arrivera en retard. (🍀🍀)

♐ **Sagittaire** – *23 novembre au 21 décembre*

Amour et amitié: L'une de tes cheesy pick up lines trouvera une oreille attentive. (❤️❤️❤️❤️)
Travailler saoul.e: Le dernier Long Island Iced Tea sera de trop! (💲)
Chance: Pas de chance, j'ai manqué d'idées! Heumm… Je veux plutôt dire que l'herméneutique des astres s'avère difficile à effectuer. (🍀)

P.S. Les plus attentifs et attentives d'entre vous auront probablement deviné mon signe astrologique. C'est moi qui ai écrit ce mathoscope, vous ne pensiez quand même pas que j'allais me contenter d'une année 2021 médiocre!

PHÉNOMÈNE INTRIGUANT DE GIBBS

PIERRE-OLIVIER

Les séries de Fourier servent beaucoup à résoudre des équations différentielles. Elles sont aussi utilisées pour approcher les valeurs de certaines fonctions. Cependant, lorsque notre fonction ne se comporte pas comme du monde, un drôle de phénomène se produit qui rend impossible l'approximation dans certains cas ! !

Ce phénomène s'appelle le phénomène de Gibbs. Pour bien le comprendre, nous présentons le concept de séries de Fourier et de ses sommes partielles associées. Bien sûr, des gens ont pensé à une façon de remédier à ce problème. Nous allons présenter une façon de faire qui utilise les moyennes de Cesàro.

1. Séries de Fourier

Joseph Fourier a été le premier à indiquer qu'il était possible d'exprimer une fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par une série trigonométrique, c'est-à-dire de la forme

$$a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt). \tag{1}$$

Cette série est appelée de nos jours *série de Fourier* en son honneur. Mais, vous me direz, comment cette dernière expression est-elle reliée à la fonction f ?

Supposons que Fourier ait eu raison (parce que je suppose qu'il ait peut-être tort !), alors multiplions par $\cos(kt)$ l'équation (1) ($k \geq 1$ un entier) et intégrons le résultat de 0 à 2π. On obtient donc

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \int_0^{2\pi} \Big(a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\Big)\cos(kt)\,dt.$$

En supposant qu'on puisse interchanger les symboles d'intégration et de sommation, le membre de droite de la dernière relation équivaut à

$$\int_0^{2\pi} a_0 \cos(kt)\,dt + \sum_{n\geq 1} a_n \int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(kt)\,dt + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nt)\cos(kt)\,dt$$

Si vous connaissez bien vos identités (sinon, googlez comme on dit), on a (pour $k \geq 1$)

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(kt)\,dt = \pi\delta_{n,k}$$

où $\delta_{n,k}$ est le delta de Kronecker, défini par

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

et

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)\cos(kt)\,dt = 0.$$

Ainsi, d'après ces dernières identités, on obtient la relation (valide pour $k \geq 1$)

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt. \tag{2}$$

L'expression (2) est appelée le *coefficient en cosinus de Fourier* de la fonction f.

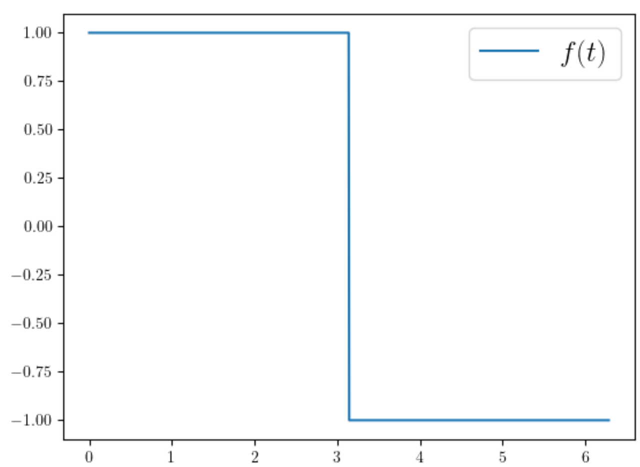


Figure 1. Graphe de la fonction f

On peut répéter l'exercice en multipliant (1) par $\sin(kt)$ ($k \geq 1$ un entier) et en intégrant le résultat de 0 à 2π. En utilisant l'identité

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(kt)\,dt = \pi\delta_{n,k}$$

on obtient l'expression du coefficient b_n en terme de la fonction f :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt \tag{3}$$

Qu'en est-il du coefficient a_0 ? Pour obtenir son expression, il suffit d'intégrer (1) de 0 à 2π directement. Comme les intégrales qui font intervenir les fonctions $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ sont zéros, on obtient

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = a_0 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a_0.$$

Par conséquent, le coefficient a_0 a comme expression

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$

Il s'agit aussi d'un coefficient en cosinus de Fourier associé à $k = 0$.

2. Somme partielle

Pour observer le phénomène de Gibbs, on va considérer un exemple concret et introduire les sommes partielles associées à une série.

Prenons la fonction $f(t)$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

et étendue de manière 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que

$$f(x + 2\pi n) = f(x) \quad (n \in \mathbb{Z},\ x \in [0, 2\pi)).$$

Cette fonction est illustrée à la figure 1. Ce qu'on veut calculer, ce sont les coefficients de Fourier. Vous pouvez vous convaincre (ou Wolframalpha peut vous convaincre) que les coefficients de Fourier en cosinus et en sinus sont

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = 0 \text{ et } b_k = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n).$$

La série de Fourier associée à la fonction f est donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)\sin(nt).$$

Pouvons-nous utiliser la série de Fourier afin d'évaluer les valeurs de la fonction f ? Pouvons-nous approximer convenablement les valeurs de notre fonction f en utilisant une partie de sa série de Fourier ?

Pour répondre à cette question, nous devons savoir comment on évalue une série !

Définition 1. *Une série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est dite convergence (où (x_n) est une sutie de nombres réels) si la limite de ses sommes partielles*

$$s_n := x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

existe, c'est-à-dire s'il existe un nombre réel s tel que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Le nombre s est appelé la *somme* de la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ (si ce nombre existe !) et on pose

$$\sum_{n\geq 0} x_n = s.$$

Si aucun nombre s n'existe tel que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, alors on dit que la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ diverge. Notre question de tantôt revient donc à : est-ce que la limite de la suite $(s_n(t))$ existe en tout point $t \in [0, 2\pi)$ où

$$s_n(t) := \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi}(1 - (-1)^k)\sin(kt) \tag{4}$$

et peut-elle servir à approcher notre fonction f convenablement (c'est-à-dire avec une petite erreur) ?

3. Le phénomène de Gibbs

Malheureusement, l'exemple est pour vous illustrer que les sommes partielles d'une série de Fourier peuvent très mal approcher les valeurs d'une fonction ! Sur la figure 2, la fonction $f(t)$ est tracée en mauve et les graphes des sommes partielles $s_n(t)$, pour $n = 2, 4, 16, 64$ sont aussi tracés.

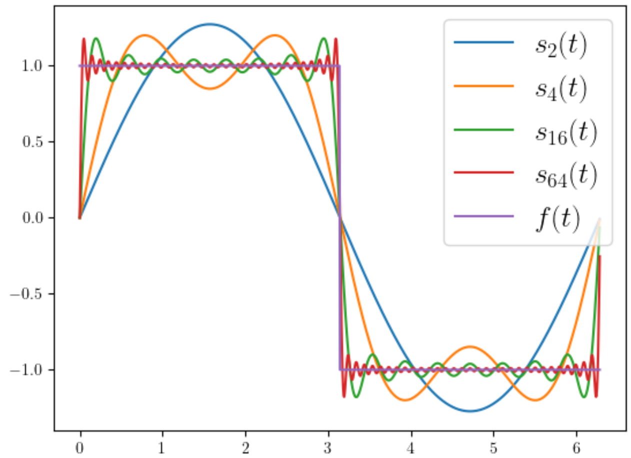


Figure 2. Sommes partielles de la série de Fourier

Observez les oscillations près du point $t = \pi$ (où il y a la cassure). La figure ci-contre illustre bien ce dernier point (il s'agit d'un rapprochement autour du point $t = \pi$ du graphe de la figure 2). On remarque que la distance entre la

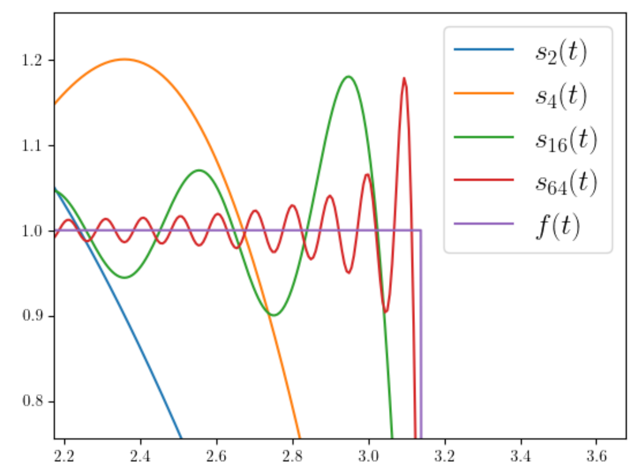


Figure 3. Zoom autour de la région $t = \pi$

plus grande bosse des sommes partielles $s_2(t)$, $s_4(t)$, $s_{16}(t)$ et $s_{64}(t)$ et la fonction $f(t)$ ne diminue jamais en dessous d'à peu près 0.2. Même si on augmentait la valeur de n (c'est-à-dire le nombre de termes dans la somme partielle) et donc la précision, les oscillations vont toujours demeurer présentes.

En fait, il y a une borne inférieure à la grandeur des oscillations. Sur le graphe, on peut calculer à peu près que cette borne inférieure est 0.2, mais il est possible d'avoir une borne précise... C'est le phénomène de Gibbs !

Théorème 1 (Phénomène de Gibbs)**.** *Avec* $t_n = \frac{n-1}{n}\pi$ *pour* $n \geq 1$*, la différence entre les sommes partielles et la valeur* 1 *est bornée inférieurement de la manière suivante :*

$$|s_n(t_n) - 1| > \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\psi}{\psi}\, d\psi - 1 \approx 0.17897974.$$

Ceci indique que, quel que soit le nombre $t < \pi$, arbitrairement près de π, il y aura toujours un nombre $t_n = \frac{n-1}{n}\pi$ tel que la quantité $|s_n(t_n)|$ a au moins une erreur de 0.17897974... sur la vraie valeur de la fonction $f(t)$. Ceci représente une erreur de près de... 17% ! ! On est mal barrés si on veut une valeur de notre fonction autour des points t_n...

4. Moyennes de Cesàro

Néanmoins, il est possible d'atténuer ce petit problème en utilisant les moyennes de Cesàro d'une suite ! L'argumentaire sera essentiellement basé sur les graphiques (pardonnez-moi...).

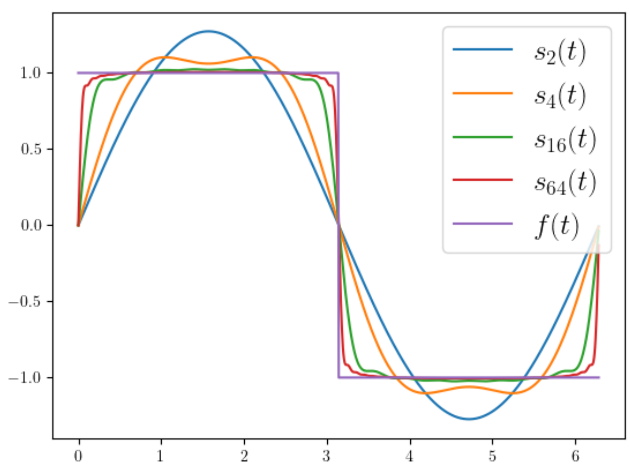


Figure 4. Graphes des moyennes de Cesàro

Définition 2. *Soit* (x_n) *une suite de nombres réels. Les moyennes de Cesàro sont définies par l'expression*

$$\sigma_n := \frac{x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n+1}.$$

Les moyennes de Cesàro sont appliquées à la suite des sommes partielles $(s_n(t))$ associée à la série de Fourier de notre exemple. Ainsi, on définit

$$\sigma_n(t) = \frac{s_0(t) + s_1(t) + s_2(t) + \cdots + s_n(t)}{n+1}$$

où $n \geq 0$ est un entier. On trace maintenant les graphes des fonctions $\sigma_2(t)$, $\sigma_4(t)$, $\sigma_{16}(t)$ et $\sigma_{64}(t)$. Ces graphes sont illustrés dans la figure 4.

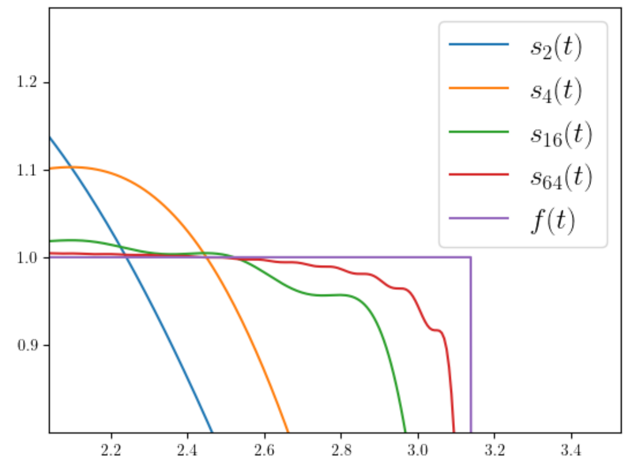


Figure 5. Zoom autour de $t = \pi$

On observe une bonne amélioration puisque les oscillations drastiques autour du point $t = \pi$ ont complètement disparu ! En faisant un petit zoom près de $t = \pi$ comme dans la figure 5, on peut voir qu'il y a encore un gap entre la valeur de la fonction près de $t = \pi$ d'au moins 0.1 près de la valeur de $t = \pi$. Ceci est causé par le fait qu'on peut déterminer la valeur exacte vers où la série de Fourier converge en $t = \pi$ puisque notre fonction est linéaire par morceaux.

Théorème 2. *Si une fonction est linéaire par morceaux, alors*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(t) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les nombres $f(x^+)$ et $f(x^-)$ sont les limites à droite et à gauche de x. Ce dernier résultat est un cas particulier du théorème de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier de fonctions différentiables par morceaux.

Dans notre exemple, nous avons $f(\pi^-) = 1$ et $f(\pi^+) = -1$ et donc la série de Fourier devrait donner 0 en $t = \pi$ selon le théorème ci-haut. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(\pi) = 0$$

Par le lemme de Cesàro (un bon vieil exercice de la série 2 d'Analyse I de Thomas), on obtient aussi que

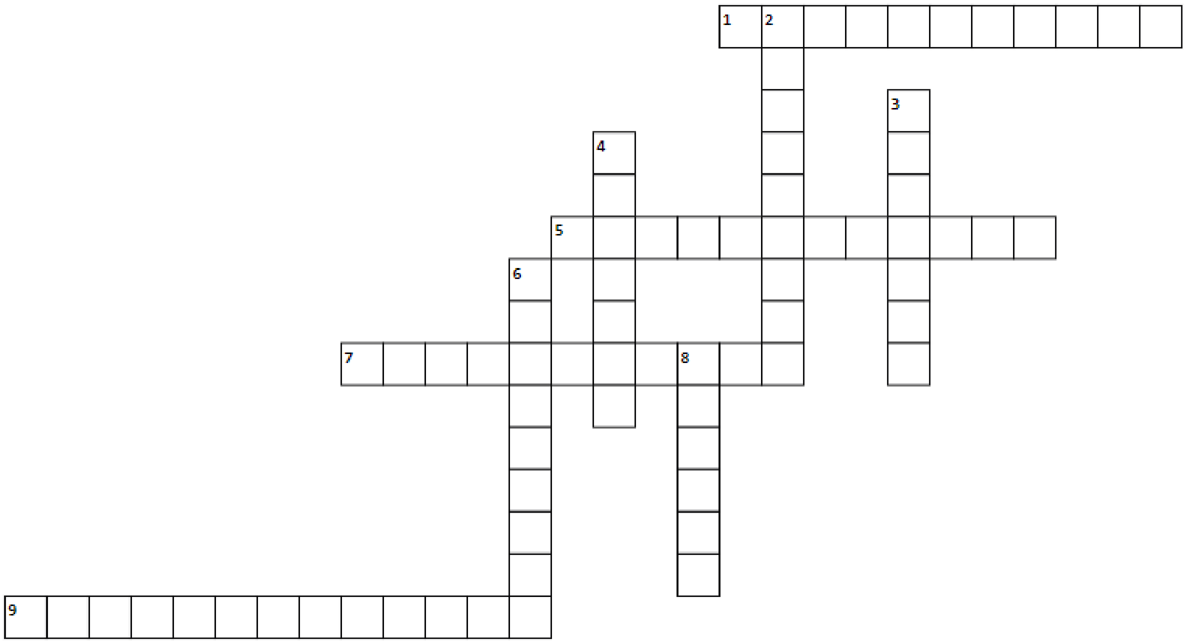
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(\pi) = 0.$$

Ceci explique pourquoi il y a un écart entre $\sigma_{64}(t)$ et $f(t)$ près de $t = \pi$: les courbes des $\sigma_n(t)$ doivent passer en 0 lorsque $t = \pi$.

Bref, au moins, l'approximation par les moyennes de Cesàro nous a débarassé des grandes oscillations perturbantes ! Souvenez-vous des moyennes de Cesàro, elles peuvent toujours servir à lisser vos courbes perturbantes !

[1] Y. Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*, third edidition, Cambridge univerisity press, 314 pp. (2004).
[2] E. Stade. *Fourier Analysis*, Wiley, 488 pp. (2005).

Géométrie en folie !



Across

1. synonyme de congruent;

5. quadrilatère dont les quatre sommets sont cocycliques;

7. le point de rencontre des hauteurs d'un triangle quelconque;

9. l'étude des propriétés des formes géométriques du plan qui partagent le même périmètre;

Down

2. les droites d'un triangle qui sont les symétriques des médianes par rapport aux bissectrices;

3. nom de l'axe qui correspond au lieu des points ayant la même puissance par rapport à deux cercles;

4. mathématicien qui a caractérisé les nombres qui sont constructibles uniquement à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas;

6. le nom du solide possèdant vingt faces régulières;

8. théorème qui indique qu'une droite parallèle à un côté d'un triangle divise les deux autres côtés de façon proportionnelle;

La base religieuse des mathématiques

Par Pénélope Bouillon, Maxime Cinq-Mars, Amélie Durocher et Michaël Rioux

Les premières traces des mathématiques en Inde remontent à 3000 av. J-C. À cette époque, les mathématiques étaient assez simples et surtout utilitaires, servant notamment pour les poids et les mesures. Il fallut attendre l'arrivée de la religion védique dans la région pour que les mathématiques connaissent un véritable essor.

1 L'avènement du védisme

L'époque védique est une période historique du subcontinent indien qui dura d'environ 1500 av. J-C à 400 av. J-C. Elle est nommée après la religion védique, l'ancêtre de l'hindouïsme. Les enseignements de la religion du Védisme étaient regroupés dans un ensemble de textes appelé les *Vedas*. Ces derniers étaient transmis oralement par les érudits. Ceux-ci élaborèrent tout un ensemble de notions mathématiques dans certains documents annexes au *Veda*. Notamment, on les retrouve dans les *sutras jyotah*, qui regroupent des notions d'astrologie et d'astronomie, et les *sutra kalpa*, relatifs aux pratiques rituelles. Ainsi, sont décrites entre autre des instructions pour la construction d'autels, d'où découle une grande quantité de constructions géométriques. Des formes précises d'autels étaient en effet associées à des dons différents des dieux et il convenait de les construire le plus exactement possible.

Les érudits védistes avaient donc connaissance de mathématiques plus tard attribuées à l'Occident, dont le théorème de Pythagore, les triplets pythagoriciens et des approximations fractionnaires des nombres irrationnels π et $\sqrt{2}$. Par exemple, une construction mène à une approximation étonnante de $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 34} = \frac{577}{408} = 1.41421...$$

Bien que rien n'était rigoureux ou formulé de manière axiomatique, certains passages laissent croire que l'idée de preuve était présente. On retrouve également plusieurs innovations mathématiques importantes dont les conséquences issues de la numérotation symbolique indienne de 0 à 9.

2 Le système décimal

Le calcul positionnel en **base 10** est un héritage des mathématiques védiques. Alors que d'autres civilisations utilisent aussi la base décimale, sa représentation symbolique est unique chez les védiques. En effet, tous les nombres naturels peuvent s'écrirent comme une chaîne de caractères parmi 10 symboles. D'ailleurs, c'est cette notation décimale qui est à l'origine des chiffres modernes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9! Cet outil permet d'introduire le concept de **notation positionnelle**. De droite à gauche, les entiers exprimés en base 10 révèlent plusieurs quantités : les unités, les dizaines, les centaines, etc. Ainsi, la quantité $1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ est équivalente au nombre 123 – une écriture encore utilisée au XXI^e siècle qui devrait être très familière pour le lecteur! Toutefois, cette familiarité ne doit pas faire ombrage sur l'importance capitale et la difficulté de cette notion. Il est nécessaire de marquer un arrêt pour lire l'éloquence du mathématicien de renom Pierre-Simon Laplace (1749-1827) à ce sujet:

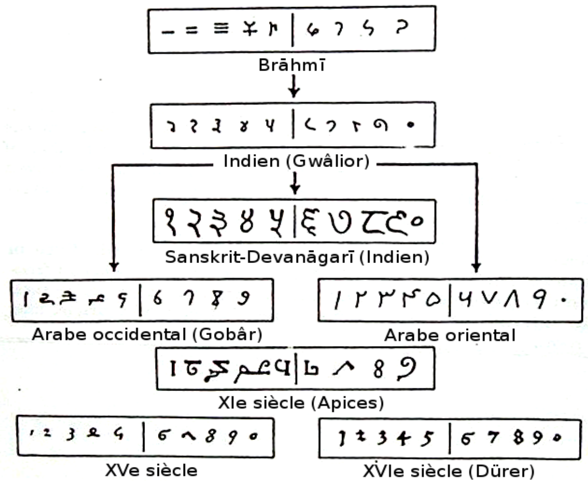


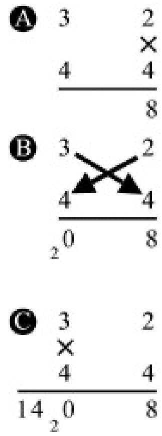
Figure 1: Évolution du système décimal

> C'est de l'Inde que nous vient l'ingénieuse méthode d'exprimer tous les nombres avec dix caractères, en leur donnant à la fois une valeur absolue et une valeur de position, idée fine et importante, qui nous paraît maintenant si simple que nous en sentons à peine le mérite. Mais cette simplicité même et l'extrême facilité qui en résulte pour tous les calculs placent notre système d'Arithmétique au premier rang des inventions utiles, et, l'on appréciera la difficulté d'y parvenir si l'on considère qu'il a échappé au génie d'Archimède et d'Apollonius, deux des plus grands hommes dont l'antiquité s'honore.

Les grands théorèmes mathématiques peuvent utiliser une base comme une autre. Alors, que le système sexagésimal (60) grec ou la base ternaire (3) théoriquement optimale auraient très bien pu être la norme, l'utilité du système décimal a été décisive dans sa conservation au fil des années.

3 La multiplication

Figure 2: Exemple de multiplication védique



L'expression des nombres en notation positionnelle mène à un calcul intuitif des opérations multiplicatives. Il suffit de procéder par «bloc» positionnel. On calcul d'abord les unités, puis les dizaines et enfin les centaines. Par exemple, soit x le résultat de l'opération $32 \cdot 44$. On trouve rapidement $2 \cdot 4 = 8$ unités, $3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 20$ dizaines et $3 \cdot 4 = 12$ centaines. On trouve donc x = 1408. Comment un védiste pourrait-il être certain de l'exactitude de la réponse? Ce résultat est vérifié tout aussi rapidement avec le *bee jank* : le résultat de l'addition de tous les nombres formant le chiffre. Par exemple, on trouve que le *bee jank* de 1408 est 4, car 1 + 4 + 0 + 8 = 13 et 1 + 3 = 4. De même, on trouve que les *bee janks* de 32 et 44 sont respectivement 5 et 8. Il est intéressant de noter que le *bee jank* de $5 \cdot 8$ est 4, le même que celui de 1408. On en devine l'identité suivante : le produit des *bee janks* est le même que le *bee jank* des produits si on considère que le *bee jank* de 9 est équivalent à celui de 0. On peut alors affirmer que $32 \cdot 44 = 1408$.

4 L'algèbre

Les textes indiens présentent plusieurs algorithmes pour résoudre des équations qui sont, à première vue, plutôt complexes. Un des *sūtras* présente un algorithme qui permet de trouver les carrés des nombres se terminant par 5. Pour cela, il faut séparer le nombre en deux parties: on note le chiffre des dizaines g (pour gauche) et le chiffre des unités d (pour droite). On obtient toujours $D = 5^2 = 25$ et $G = g(g+1)$. G et D représentent respectivement la partie de gauche et la partie de droite du carré. Par exemple, si on a le nombre 85, $d = 5$, $g = 8$, on trouve donc $D = 5^2 = 25$ et $G = 8(8+1) = 72$. Ainsi, le carré de 85 est 7225.

On y trouve aussi un algorithme pour calculer le carré d'un nombre N près d'une puissance de 10. On commence en posant A la chaîne des chiffres aux positions inférieures à cette puissance. Ensuite, on évalue premièrement $N + A$ et deuxièmenent A^2. Le résultat de N^2 est simplement la jonction textuelle, dans l'ordre présenté, de ces deux quantités. Par exemple, soit $1004^2 = x$. Ici, N = 1004 et A = 004. On obtient alors $N + A$ = 1004 + 004 = 1008 et A^2 = 016. Ainsi, x = 1008 016.

5 Les sources manuscrites

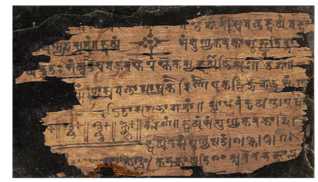


Figure 3: Le manuscrit de Bakhshali

La transmission des *Vedas* étant basée sur la tradition orale, il est difficile de préciser exactement à quand remonte l'élaboration de tous ces résultats mathématiques. Toutefois, la majorité des auteurs s'entendent pour dire que les premières versions à être écrites sur des manuscrits datent d'après 500 av. J-C. Ces manuscrits étaient faits à partir de feuilles de palmier ou encore d'écorce de bouleau. Pour ces raisons, il ne reste aucun manuscrit de cette période. Le manuscrit le plus vieux de la collection à Pune remonte par exemple à 1464 A.D. En ce qui à trait aux mathématiques, le plus célèbre et aussi le plus ancien est le manuscrit de Bakhshali, découvert en 1881 près du village pakistanais du même nom. On pense qu'il date du 3e siècle. On retrouve sur les quelques 70 feuilles de bouleau d'écorce récupérées un ensemble de règles mathématiques et des exemples portant principalement sur l'algèbre et l'arthmétique. Fait intéressant, le manuscrit de Bakhshali est le plus ancien document sur lequel on utilise un symbole pour zéro!

6 Conclusion

En dernière analyse, les mathématiques indiennes antiques ont contribué à un bon nombre d'éléments mathématiques qui sont utilisés encore à ce jour. C'est grâce à la religion védique que les mathématiques en Inde connurent une croissance fulgurante. Si ce n'était pas de cette dernière, la notation positionnelle décimale qu'on retrouve dans les *Vedas* n'aurait peut-être jamais vu le jour. De plus, les formes géométriques dessinées sur ces documents montrent que les indiennes connaissaient déjà les notions du théorème de Pythagore, des triplets pythagoriciens ainsi que des approximations de π et $\sqrt{2}$. Il est fascinant de voir que les indiens ont même développé des algorithmes dont la multiplication védique, le *bee jank*, le calcul carré d'un nombre près d'une base et celui des nombres qui finissent par 5. Ces techniques algébriques permettent d'effectuer des calculs à la main qui nous semblent aujourd'hui peu intuitifs à résoudre sans la calculatrice. Même si ces découvertes semblent banales aujourd'hui, compte tenu des connaissances de l'époque, l'héritage de l'Inde a profondément révolutionné les mathématiques

References

[1] Goossens, M., Mittelbach, F. et Samarin, A.. *Mathematics in the Service of Religion: I. Vedas and Vedangas*. Maths History. Consulté le 21 janvier 2021. `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Projects/Pearce/chapter-4/`.

[2] Hayes, B. (2001). *Third Base*. (PDF) December, Num 2. American Scientist.

[3] Krishna Tirtha, Bharati (2014). *Fundamentals applications of vedic mathematics* (PDF). State Council of Educational Research Training.

[4] Laplace, Pierre-Simon. *Oeuvres complètes de Laplace.* Vol. 6, L'Académie des sciences, page 404.

[5] Plofker, Kim (2007). *Mathematics in Indi* . Dans Katz, Victor J (ed.). The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook. Princeton University Press.

[6] O'Connor, J.J. et Robertson, E.F. (2000). *Bakhshali Manuscript*. Maths History. Consulté le 21 janvier 2021. `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Bakhshali`$_manuscript$`/`.

Développement de Taylor de f

Soit f analytique sur $\mathbb{D}$.

On veut démontrer que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

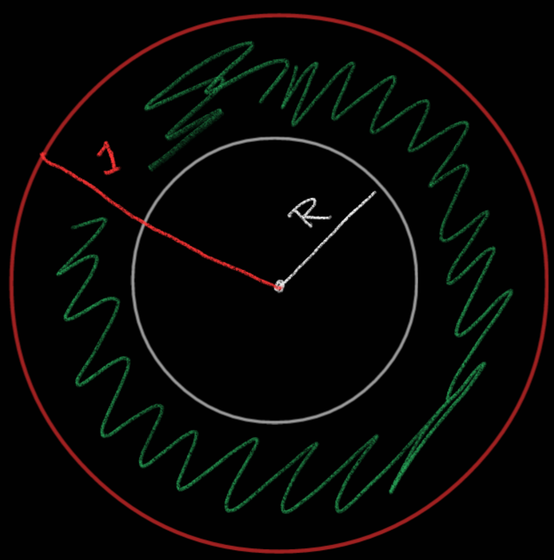
- f analytique en $z=0$. Alors $\exists\ R>0$ t.q.

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad (z \in D(0,R)).$$

On souhaite montrer que R est au moins de 1, i.e. $R \geq 1$. Supposons, si possible, le contraire, c'est-à-dire :

$$R < 1.$$

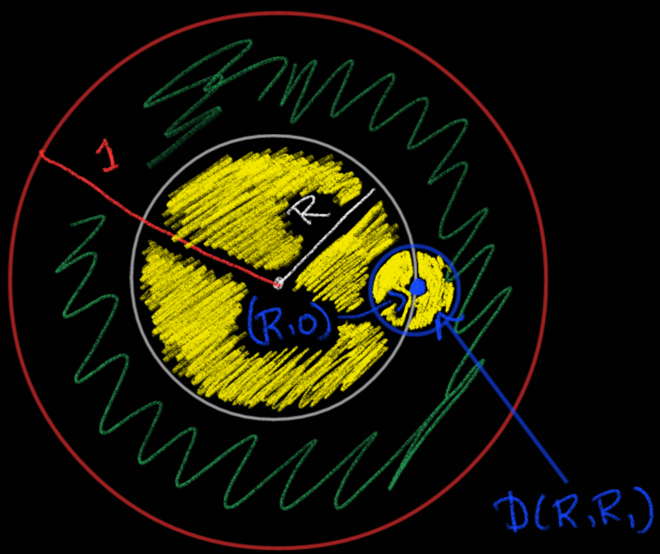
Image



Rappelons que f est analytique sur $\mathbb{D}$. Ainsi, en chaque point de la frontière de $D(0,R)$, f admet un développement de Taylor.

En particulier, au point $z_0 = R$, il existe un nombre $R_1 > 0$ t.q.

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(R)}{n!} (z-R)^n \quad \left(\forall z \in D(R,R_1)\right)$$



Nous allons maintenant utiliser un théorème très utile concernant les fonctions holomorphes.

Principe d'identité

Soit g et h deux fonctions holomorphes sur un domaine (ouvert et connexe) Ω.
S'il existe une suite $(w_n)_{n\geq 1} \subseteq \Omega$ t.q. $w_n \longrightarrow w \in \Omega$ et $g(w_n) = h(w_n)$ $\forall n$

alors $g(z) = h(z)$ $\forall z \in \Omega$ (!!!)

Dans notre cas, on pose

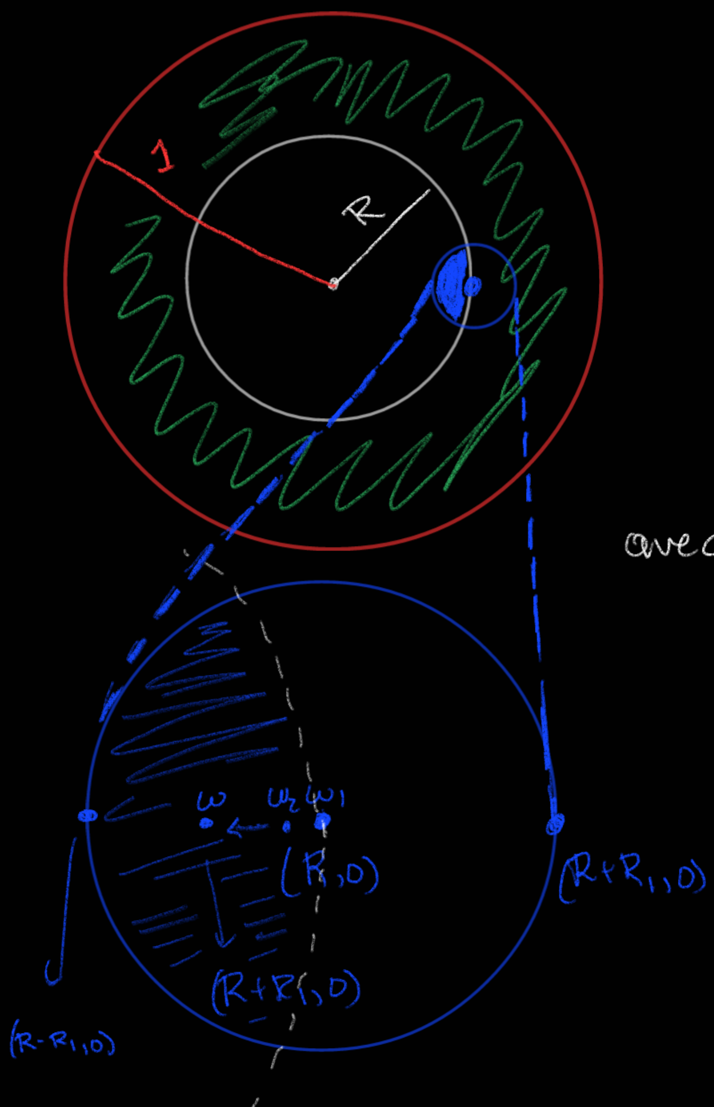
$$\Omega = \mathbb{D} \cup D(R, R_1) \quad \text{(région en jaune ci-haut)}$$

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$h(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(R)}{n!} (z-R)^n .$$

Partout sur $\mathbb{D} \cap D(R, R_1)$ (Région en bleue ci-bas)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(R)}{n!} (z-R)^n .$$



Il y a beaucoup de points d'accumulation dans cette région. Par exemple :

$$w_n = \frac{R - R_1}{2n} + \frac{R + R_1}{2}$$

avec $w_n \longrightarrow \frac{R+R_1}{2} \in \mathbb{D} \cap D(R, R_1)$

Donc, on peut appliquer le principe d'identité et obtenir

$$h(z) = g(z) \quad , \quad \forall z \in \mathbb{D} \cup D(R, R_1)$$

Donc, comme $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad (*)$$

pour chaque $z \in \mathbb{D} \cup D(R, R_1)$.

Rappelons que le rayon de convergence R a une propriété particulière:

- Si $|z| < R \Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$
- Si $|z| = R \Rightarrow$ on ne peut rien dire en général.
- Si $|z| > R \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ diverge.

Or, en prenant $z = R + \frac{R_1}{2} \in \mathbb{D} \cup D(R, R_1)$

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

doit converger! Mais $|z| = R + \frac{R_1}{2} > R$

$\Rightarrow \quad \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ doit diverger.

On a donc une contradiction.

L'hypothèse que $R < 1$ doit être rejetée et on conclut que $R \geq 1$.
Autrement dit

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad \forall\, z \in D(0,R)$$

où $\mathbb{D} \subseteq D(0,R)$. $\square$

Réponses :

icosaèdre le nom du solide possédant vingt faces régulières;

thalès théorème qui indique qu'une droite parallèle à un côté d'un triangle divise les deux autres côtés de façon proportionnelle;

isopérimétrie l'étude des propriétés des formes géométriques du plan qui partagent le même périmètre;

orthocentre le point de rencontre des hauteurs d'un triangle quelconque;

isométrique synonyme de congruent;

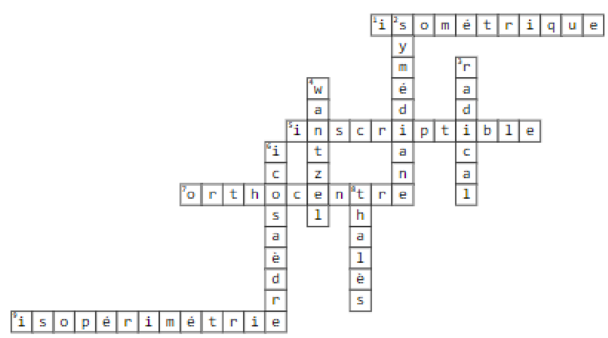
inscriptible quadrilatère dont les quatre sommets sont cocycliques;

radical nom de l'axe qui correspond au lieu des points ayant la même puissance par rapport à deux cercles;

wantzel mathématicien qui a caractérisé les nombres qui sont constructibles uniquement à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas;

symédiane les droites d'un triangle qui sont les symétriques des médianes par rapport aux bissectrices;

https://crosswordlabs.com/



Across

1. synonyme de congruent;
5. quadrilatère dont les quatre sommets sont cocycliques;
7. le point de rencontre des hauteurs d'un triangle quelconque;
9. l'étude des propriétés des formes géométriques du plan qui partagent le même périmètre;

Down

2. les droites d'un triangle qui sont les symétriques des médianes par rapport aux bissectrices;
3. nom de l'axe qui correspond au lieu des points ayant la même puissance par rapport à deux cercles;
4. mathématicien qui a caractérisé les nombres qui sont constructibles uniquement à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas;
6. le nom du solide possèdant vingt faces régulières;
8. théorème qui indique qu'une droite parallèle à un côté d'un triangle divise les deux autres côtés de façon proportionnelle;